社団法人　電子情報通信学会
THE INSTITUTE OF ELECTRONICS,
INFORMATION AND COMMUNICATION ENGINEERS

信学技報
TECHNICAL REPORT OF IEICE.

対戦相手の誤認を考慮した2集団チキンゲームのダイナミクス

金澤　尚史†　　潮　　俊光†

† 大阪大学大学院基礎工学研究科　〒 560–8531 大阪府豊中市待兼山町 1–3
E-mail: †kanazawa@hopf.sys.es.osaka-u.ac.jp

あらまし　従来の非対称ゲームモデルでは，各主体が対戦相手の属する集団を正確に認識すると暗に仮定され，主体の認識の違いは考慮されていない．しかしながら複数集団の共存下では，各主体が，対戦相手の属する集団によって戦略を変化させることが考えられ，それぞれの主体が他の主体の属する集団を誤って認識することも考えられる．そこで本報告では，対戦相手の誤認を考慮した複数集団からなる進化ゲームモデルを提案する．さらに，利得や認識の異なる 2 つの集団の主体がチキンゲームを行う状況に適用し，シミュレーションを行う．
キーワード　進化ゲーム，レプリケータダイナミクス，認識

Dynamics of Two-population Chicken Games with Erroneous Perceptions

Takafumi KANAZAWA† and Toshimitsu USHIO†

† Graduate School of Engineering Science, Osaka University　1–3 Machikaneyama, Toyonaka, Osaka, 560–8531 Japan
E-mail: †kanazawa@hopf.sys.es.osaka-u.ac.jp

Abstract　In the conventional models of asymmetric games, it is implicitly assumed that individuals can identify which sub-populations the other individuals belong to, and individuals' perceptions have been disregarded. However, when an individual interacts with the other individual under coexistence of heterogeneous populations, we can consider that the individual changes its strategy depending on the opponent. In such a situation, each individual may make an error about the population the opponent belongs to. In this paper, we propose a multipopulation model with erroneous perceptions for opponents. We focus on a two-population chicken game with the erroneous perception, and discuss several cases of its replicator dynamics.
Key words　evolutionary game, replicator dynamics, perception

1. まえがき

進化ゲーム理論は，多数の主体を含む集団において，主体が実際にある戦略をとった後，その利得の大小によって集団における戦略分布が変化すると考えるものである [1]．従来の非対称ゲームのモデルでは，各主体は，各集団からランダムに抜き出された主体と単位時間に一度ずつゲームを行うと仮定されている [2], [3]．この仮定は，各主体が，他の主体がどの集団に属しているかを正確に区別出来るということを暗示している．しかしながら，このような場合，主体が他の主体と相互作用するとき，相手がどの集団に属するかによって戦略を変化させると考える方が自然である．

一方複雑な状況においては，様々な誤解が存在するのが普通である．主体の認識の違いを扱うものとしてハイパーゲーム理論があるが [4]，複数集団のモデルにおいては，ハイパーゲームで扱われるものとは別の形の誤認識，ゲームの相手自体を誤認する状況が考えられる．各主体が対戦相手を区別すると仮定するとき，各主体が他の主体の属する集団を正確に区別できると考えるよりも，誤りを含んだ自分の認識，主観に基づいて他の主体の属する集団を判断し，その判断に基づいて自分の戦略を選択すると考える方が自然である．

したがって本報告では，主体が相手の主体の属する集団によって戦略を変化させると考え，さらに，相手の属する集団を誤って認識する場合を考慮したモデルを提案する．このモデルに対し，進化的に安定な戦略（ESS）とレプリケータダイナミクスを定め，その性質について考察する．2 集団のチキンゲームに適用し，平衡点の安定性について議論する．

2. 準　　備

2.1 非対称ゲームの進化ゲームモデル

進化ゲーム理論の拡張として，2 つの異なる集団が存在し，非対称ゲームを含むようなモデルが提案されている [2]．また，

その n 集団への拡張は [3], [5] で研究されている．

n 個の集団をそれぞれ $P_1, P_2, \cdots, P_n$ とする．集団 P_i の純粋戦略集合を $\Phi_i = \{1, 2, \cdots, m_i\}$ とし混合戦略集合を S_i とする．利得行列は，ゲームを行う相手にも依存し，P_i の主体が P_j の主体とゲームを行うときの利得行列を A_{ij} とする．

非対称ゲームモデルでは，進化的に安定な戦略として様々な概念が提案されている [2], [3], [5]．本報告では Garay [5] によって提案された，強 ESS の概念を用いる．

$s^* = (s_1^*, \ldots, s_n^*) \in S_1 \times \cdots \times S_n$ が，全ての $s \neq s^*$（$s \in S_1 \times \cdots \times S_n$），全ての i（$i = 1, \cdots, n$），十分小さな $\epsilon_j > 0$（$j = 1, \cdots, n$）に対して

$$s_i^{*T} \left(\sum_{j=1}^{n} A_{ij} \bar{s}_j \right) > s_i^T \left(\sum_{j=1}^{n} A_{ij} \bar{s}_j \right) \quad (1)$$

を満たすならば，進化的に安定な戦略（ESS）という．ここで，$\bar{s}_j = (1-\epsilon)s_j^* + \epsilon_j s_j$ とする．

各主体が，1 つの純粋戦略をとると仮定する．集団 P_i において純粋戦略 $k \in \Phi_i$ をとる主体が，時刻 t において集団全体に占める割合を $s^k(t)$ とすると，集団 P_i の集団状態は，ベクトル $s_i(t) = (s_i^1(t), \cdots, s_i^n(t))^T \in S_i$ で定義される．ゆえに集団状態は，形式的には混合戦略 $s_i \in S_i$ と同様である．全集団の集団状態は，$s = (s_1(t), \cdots, s_n(t))$ となる．

各主体は，各集団からランダムに抜き出された主体と単位時間に一度ずつゲームを行うと仮定されている．e_i^k を，第 k 成分が 1 の m_i 次元単位列ベクトルとする．集団 P_i における戦略 k の増加率 $\dot{s}_i^k / s_i^k$ が，その利得と，集団平均利得との差に等しいとする．するとレプリケータダイナミクスは全ての i（$i = 1, \cdots, n$），全ての $k \in \Phi$ に対して，

$$\dot{s}_i^k = s_i^k (e_i^k - s_i)^T \left(\sum_{j=1}^{n} A_{ij} s_j \right) \quad (2)$$

となる [3].

3. 主体の認識を考慮しない複数集団のモデル

多数の主体からなる n 個の集団 $P_1, P_2, \cdots, P_n$ が共存している状況を考える．各主体は単位時間あたり一度，全ての主体の中から，集団の区別無くランダムに取り出された 1 つの主体とゲームを行うと仮定する．さらに，一般の進化ゲームと同様の考え方に基づき，各主体はゲームを行った結果，属する集団によって異なった利得を得て，その利得の大小によって，各集団内の主体のとる戦略の分布が変化すると仮定する．

全主体に対して集団 P_i の主体の占める割合を α_i，集団 P_i の主体の利得行列を A_i とする．ここで $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$ である．全集団において，純粋，混合戦略集合は共通でそれぞれ $\Phi = \{1, \cdots, m\}$，S であるとし，$S^n = \{(s_1, s_2, \cdots, s_n)^T | s_i \in S, i = 1, 2, \cdots, n\}$ と表す．

このモデルは明らかに，n 集団の非対称ゲームモデル [3] の特殊形となっている．このモデルの進化的に安定な戦略（ESS）を，[5] の ESS の概念を用いて以下のように定義する．

［定義 1］ $s^* \in S^n$ が，全ての $s \neq s^*$（$s \in S^n$），全ての i（$i = 1, \cdots, n$），十分小さな $\epsilon_j > 0$（$j = 1, \cdots, n$）に対して

$$s_i^T A_i \left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_j \bar{s}_j \right) < s_i^{*T} A_i \left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_j \bar{s}_j \right) \quad (3)$$

を満たすならば ESS であるという．ここで，$\bar{s}_j = (1-\epsilon_j)s_j^* + \epsilon_j s_j$ とする．

十分小さい ϵ_j に対して式（3）が成立することから，以下の定理が得られる．

［定理 1］ 戦略の組 $s^* \in S^n$ が ESS となる必要十分条件は，以下の 2 条件を満たすことである．

（1） 均衡条件：全ての $s \in S$，全ての i（$i = 1, \cdots, n$）に対して，

$$s_i^{*T} A_i \left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_j s_j^* \right) \geqq s_i^T A_i \left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_j s_j^* \right) \quad (4)$$

が成立する．

（2） 安定条件：均衡条件で等号が成立する全ての $s \neq s^*$ に対して，

$$(s_i^* - s_i)^T A_i \left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_j s_j \right) > 0 \quad (5)$$

が成立する．

$s_i^j(t)$ を，時刻 t において，集団 P_i に属し純粋戦略 j をとる主体の割合とする．集団 P_i における，戦略 j をとる主体の増加率 $\dot{s}_i^j / s_i^j$ が，その利得と，集団 P_i の主体の平均利得との差に等しいとし，レプリケータダイナミクスを

$$\dot{s}_i^j = s_i^j (e^j - s_i)^T A_i \left(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k s_k \right) \quad (6)$$

で定める．ただし e^j は，第 j 要素が 1 の単位列ベクトルである．

4. 対戦相手の誤認を考慮した複数集団のモデル

本章では，前章のモデルに対して主体の認識を導入し，対戦相手の誤認を考慮したモデルを提案する．各主体は，対戦相手の属する集団によって戦略を使い分けようとするが，ゲームの相手がどの集団に属するか正確な知識を持っているわけではなく，自分の主観によって判断し，ある確率で相手の属する集団を誤ってゲームを行うと考える．

4.1 m 戦略 n 集団のゲームモデル

前章と同様に，n 個の集団 $P_1, P_2, \cdots, P_n$ が共存している状況を考える．全主体に対して集団 P_i の主体の占める割合を α_i，集団 P_i の主体の利得行列を A_i とする．また，全集団において純粋戦略集合，混合戦略集合が共通で，それぞれ $\Phi = \{1, 2, \cdots, m\}$，$S$ であるとする．β_i^{jk} を，P_i の主体が，P_j の主体を P_k の主体と認識する確率として定義する（$i, j, k = 1, \cdots, n,\ k \neq i$）．ここで $\sum_{k=1}^{n} \beta_i^{jk} = 1$ である．

各主体が，相手の主体の属する集団によって戦略を使い分けることから，集団 P_i の主体の拡張された混合戦略集合を $S_i = \{(s_{i1}^T, s_{i2}^T, \cdots, s_{in}^T)^T | s_{ij} \in S, j = 1, \cdots, n\}$ と表す．ただし s_{ij} を，P_i の主体が P_j と認識した主体に対して用

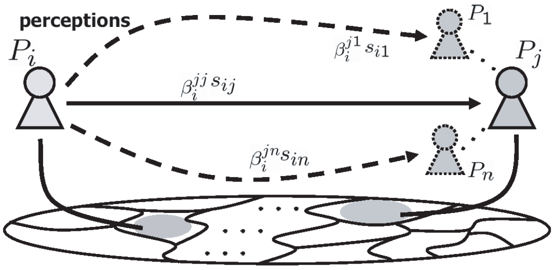


図 1　P_i の主体の P_j の主体に対する認識

いる戦略とする．また，拡張された混合戦略の組の集合を $S^{n\times n}=\{(s_1,\cdots,s_n)|s_i\in S_i, i=1,\cdots,n\}$ で表し，行列 E_i^j を，

$$E_i^j = \left[\begin{array}{cccc} \beta_i^{j1}I_n & \beta_i^{j2}I_n & \cdots & \beta_i^{jn}I_n \end{array}\right] \tag{7}$$

とする．ここで I_n は n 次元単位行列とする．行列 E_i^j は，集団 P_i の主体の P_j の主体に対する認識を表す．このモデルにおける，P_i の主体の P_j の主体に対する認識の概念を図 1 に示す．

集団 P_i が，ただ一つの戦略 $s_i^*\in S_i$ をとる主体からなるとし，その集団内に，別の戦略 $s_i\in S_i$ をとる小集団が現れたとする．侵入後集団において戦略 s_i をとる主体が占める割合を $\epsilon_i\in(0,\,1)$ とする．定義 1 と同様にして，このモデルにおける進化的に安定な戦略（ESS）を以下のように定義する．

［定義 2］　戦略の組 $s^*\in S^{n\times n}$ が，全ての $s\neq s^*$（$s\in S^{n\times n}$），全ての i（$i=1,\cdots,n$），十分小さな $\epsilon_j>0$（$j=1,\cdots,n$）に対して

$$\sum_{j=1}^{n}\alpha_j\left(E_i^js_i\right)^TA_i\left(E_j^i\bar{s}_j\right) < \sum_{j=1}^{n}\alpha_j\left(E_i^js_i^*\right)^TA_i\left(E_j^i\bar{s}_j\right) \tag{8}$$

を満たすならば ESS であるという．ここで $\bar{s}_j=(1-\epsilon_j)s_j^*+\epsilon_js_j$ とする．

式（8）を変形すると，

$$\sum_{j=1}^{n}\alpha_j\left\{E_i^j\left(s_i^*-s_i\right)\right\}^TA_i\left(E_j^is_j^*\right) - \sum_{j=1}^{n}\alpha_j\epsilon_j\left\{E_i^j\left(s_i^*-s_i\right)\right\}^TA_i\left\{E_j^i\left(s_j^*-s_j\right)\right\}>0 \tag{9}$$

となる．したがって，以下の定理を示すことができる．

［定理 2］　戦略の組 $s^*\in S^{n\times n}$ が ESS となる必要十分条件は，以下の 2 条件を満たすことである．

（1）　均衡条件：全ての $s\in S^{n\times n}$，全ての i，k（$i,k=1,\cdots,n$）に対して，

$$\sum_{j=1}^{n}\alpha_j\beta_i^{jk}\left(s_{ik}^*-s_{ik}\right)^TA_i\left(E_j^is_j^*\right)\geqq 0. \tag{10}$$

が成立する．

（2）　安定条件：均衡条件で等号が成立する全ての $s\neq s^*$，i（$i=1,\cdots,n$）に対して，

$$\sum_{j=1}^{n}\alpha_j\left\{E_i^j\left(s_i^*-s_i\right)\right\}^TA_i\left(E_j^is_j\right)>0. \tag{11}$$

が成立する．

［証明］十分小さい ϵ_j に対して式（8）が成立することから，$\epsilon=\epsilon_1=\cdots=\epsilon_n$ として，式（8）が成立するような ϵ と ϵ_j（$j=1,\cdots,n$）が存在する．したがって，戦略の組 $s^*\in S^{n\times n}$ が ESS となるための必要十分条件は以下の 2 条件を満たすことである．

（1）’　全ての $s\in S^{n\times n}$，全ての i（$i=1,\cdots,n$）に対して，

$$\sum_{j=1}^{n}\alpha_j\left(E_i^js_i^*\right)^TA_i\left(E_j^is_j^*\right)\geqq\sum_{j=1}^{n}\alpha_j\left(E_i^js_i\right)^TA_i\left(E_j^is_j^*\right) \tag{12}$$

が成立する．

（2）　定理 2 の安定条件が成立する．

次に，条件（1）’ が定理 2 の条件（1）と同値であることを示す．式（12）から，

$$\sum_{j=1}^{n}\alpha_j\left\{E_i^j\left(s_i^*-s_i\right)\right\}^TA_i\left(E_j^is_j^*\right) = \sum_{k=1}^{n}\left\{\sum_{j=1}^{n}\alpha_j\beta_i^{jk}\left(s_{ik}^*-s_{ik}\right)^TA_i\left(E_j^is_j^*\right)\right\}\geqq 0. \tag{13}$$

であるので，式（13）より明らかに，条件（1）が成立すれば，条件（1）’ は成立する．

戦略の組 $s^*\in S^{n\times n}$ が，条件（1）’ を満たすとする．この s^* に対して，式（10）を満たさない $s_{i\hat{k}}\in S$ が存在する，すなわち，

$$\sum_{j=1}^{n}\alpha_j\beta_i^{j\hat{k}}\left(s_{i\hat{k}}^*-s_{i\hat{k}}\right)^TA_i\left(E_j^is_j^*\right)<0 \tag{14}$$

を満たす $\hat{k}$ が存在するとする．

今この $s_{i\hat{k}}$ を用い，$s_i'=(s_{i1}^{*T},\cdots,s_{i\hat{k}-1}^{*T},s_{i\hat{k}}^T,s_{i\hat{k}+1}^{*T},\cdots,s_{in}^{*T})^T$ とおく．式（13）の左辺の s_i に，この s_i' を代入すると，

$$\sum_{k=1}^{n}\left\{\sum_{j=1}^{n}\alpha_j\beta_i^{jk}\left(s_{ik}^*-s_{ik}'\right)^TA_i\left(E_j^is_j^*\right)\right\} = \sum_{j=1}^{n}\alpha_j\beta_i^{j\hat{k}}\left(s_{i\hat{k}}^*-s_{i\hat{k}}\right)^TA_i\left(E_j^is_j^*\right)<0. \tag{15}$$

となる．しかしながら式（15）は，s^* が条件（1）’ を満たすことと矛盾する．したがって，式（10）がどのような k に対しても成立し，条件（1）’ が成立すれば，定理 2 の条件（1）が成立する．　□

各主体は，それぞれの集団の主体に対して純粋戦略を使い分けるとする．集団 P_i に属しているが，集団 P_j の主体と認識した相手に対して戦略 k をとる主体の割合を $s_{ij}^k(t)$ とし，レプリケータダイナミクスを

$$\dot{s}_{ij}^k = s_{ij}^k\sum_{l=1}^{n}\alpha_l\beta_i^{lj}\left(e^k-s_{ij}\right)^TA_i\left(E_l^is_l\right) \tag{16}$$

で定める．ただし e^k は第 k 要素が 1 の単位列ベクトルである．

ESS とレプリケータダイナミクス（16）の間に以下の定理が成り立つ．

［定理 3］　戦略の組 $s^*\in S^{n\times n}$ が ESS ならば，全集団状態 s^* はレプリケータダイナミクス（16）の局所漸近安定な平衡点となる．さらに s^* が内部 ESS であるならば，その平衡点は大域的漸近安定である．

［証明］$s^* \in S$ を ESS とする．関数

$$V(s)=\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n}\left(-\sum_{s_{ij}^{k*}>0} s_{ij}^{k*}\log\frac{s_{ij}^{k}}{s_{ij}^{k*}}\right)$$

を定義する．これは明らかに $V(s^*)=0$ である．また，イェンセンの不等式を用いると，$V(s)\geqq 0$ で，等号成立が $s=s^*$ であることがわかる．

$V(s)$ のレプリケータダイナミクス（16）の解に沿った時間微分は，

$$\dot{V}(s) = -\sum_{i=1}^{n}\left[\sum_{l=1}^{n}\alpha_l\left\{E_i^l(s_{ij}^*-s_{ij})\right\}^T A_i\left(E_l^i s_l\right)\right] \quad (17)$$

となる．

ここで定義 2 から，十分小さい全ての ϵ_j（$j=1,\cdots,n$）に対して式（8）が成立するから，任意の $\bar{s}\in U$ に関して

$$\sum_{j=1}^{n}\alpha_j\left\{E_i^j\left(s_i^*-s_i\right)\right\}^T A_i\left(E_j^i\bar{s}_j\right)>0 \quad (18)$$

が成立するような s^* の近傍 U がとれる．したがって，s^* の近傍 U 内の点 $\bar{s}$ に対して $\dot{V}(\bar{s})<0$ が成立することから，s^* は局所漸近安定な平衡点となる．

また s^* が内部 ESS であるとき，定理 2 の条件（1）で，全ての $s\neq s^*$ に対して等号が成立し，全ての $s\neq s^*$ に対して条件（2）が成立することから，$\dot{V}(s)<0$ である．したがって，$\mathrm{int}(S^{n\times n})$ から出発する全ての解は s^* に収束するので，s^* は大域的漸近安定である．□

主体の認識について以下のように定義する．

［定義 3］ $E_i^p=E_i^q$ が成立するとき，集団 P_i の主体は，集団 P_p の主体と集団 P_q の主体を区別できないという．

各主体が全ての集団の主体を区別できないとき，主体の認識を考慮しないモデルの ESS とレプリケータダイナミクス（16）との間には以下の関係が成立する．

［定理 4］ 戦略の組 $\hat{s}^*\in S^n$ を定義 1 で定めた ESS とする．全ての集団の主体が，全ての集団の主体を区別できないならば，$E_i s_i^*=\hat{s}_i^*$（$i=1,\cdots,n$）を満たす戦略 $s_i^*\in S_i$ からなる戦略の組 $s^*\in S^{n\times n}$ は，レプリケータダイナミクス（16）の平衡点となる．

［証明］定義 3 より，全ての i（$i=1,\cdots,n$）に対して $E_i^1=E_i^2=\cdots=E_i^n$ が成立する．したがって $E_i=E_i^j$，$\beta_i^{\cdot k}=\beta_i^{jk}$（$i=1,\cdots,n,k\in\Phi$）とおく．今 $\hat{s}^*$ が，定義 1 によって定められた ESS であるから，定理 1 の条件 1 が成り立つ．したがって，$E_i s_i\in S$ であることに注意すると，全ての $E_i s_i$，すなわち全ての $s_i\in S$（$i=1,\cdots,n$）に対して，

$$\left(\hat{s}_i^*-E_i s_i\right)^T A_i\left(\sum_{j=1}^{n}\alpha_j\hat{s}_j^*\right)$$
$$=\sum_{j=1}^{n}\alpha_j E_i\left(s_i^*-s_i\right)^T A_i\left(E_j s_j^*\right)\geqq 0 \quad (19)$$

が成立する．よって $s^*\in S^{n\times n}$ は，定理 2 の条件（1）’を満たし，結局定理 2 の条件（1）を満たすので，

$$s_{ik}^*=\arg\max_{s_{ik}\in S}\sum_{j=1}^{n}\alpha_j\beta_i^{\cdot k}s_{ik}^T A_i\left(E_j s_j^*\right)$$
$$\iff s_{ik}^l>0\rightarrow\sum_{j=1}^{n}\alpha_j\beta_i^{\cdot k}(e^l-s_{ik}^*)^T A_i\left(E_j s_j^*\right)=0 \quad (20)$$

となる．

ゆえに，$E_i s_i^*=\hat{s}_i^*$（$i=1,\cdots,n$）を満たす戦略 $s_i^*\in S_i$ からなる戦略の組 $s^*\in S^{n\times n}$ は，式（16）の平衡点となる．□

この定理は，$E_i s_i^*=\hat{s}_i^*$（$i=1,\cdots,n$）を満たす限りにおいては，各主体が戦略を相手によって使い分けるメリットがなく，結局は，全主体に対して $\hat{s}_i^*$ を用いても平衡点となることを示すものである．

4.2 2 戦略 2 集団のゲームモデル

ESS やレプリケータダイナミクスが利得の局所シフトに対して不変であるから，2 戦略 2 集団の場合，一般性を失うことなく利得行列を

$$A_1=\begin{bmatrix}a_{11} & 0\\ 0 & a_{12}\end{bmatrix},\qquad A_2=\begin{bmatrix}a_{21} & 0\\ 0 & a_{22}\end{bmatrix}$$

とおくことができる．また，$0<\alpha_1<1$ とする．ここで $\alpha_2=1-\alpha_1$ であり，全ての i，j（$i,j=1,\cdots,n$）に対して $s_{ij}^2=1-s_{ij}^1$，$\beta_i^{j2}=1-\beta_i^{j1}$ となる．レプリケータダイナミクスは戦略 1 のみを使って以下のように書ける．

$$\dot{s}_{ij}^1 = s_{ij}^1(1-s_{ij}^1)\sum_{l=1}^{2}\alpha_l\beta_i^{lj}$$
$$\times\left[\left\{\beta_l^{i1}s_{l1}^1+(1-\beta_l^{i1})s_{l2}^1\right\}(a_{i1}+a_{i2})-a_{i2}\right]. \quad (21)$$

戦略の組を $s=[s_{11}^1,s_{12}^1,s_{21}^1,s_{22}^1]^T$ と表すとする．

このレプリケータダイナミクスの孤立した内部平衡点 $[s_{11}^{1*},s_{12}^{1*},s_{21}^{1*},s_{22}^{1*}]^T$ を考える．i,j（$i,j=1,2$）に対して $\beta_i^{11}\neq\beta_i^{21}$ が成立しない場合，孤立した内部平衡点は存在しない．また $a_{i1}+a_{i2}=0$ のとき，$a_{i1}>0$ であれば，常に $\dot{s}_{ij}^1>0$，$a_{i1}<0$ であれば，常に $\dot{s}_{ij}^1<0$ となって，内部平衡点は存在せず，$a_{i1}=a_{i2}=0$ であれば，常に $\dot{s}_{ij}^1=0$ となって，孤立した内部平衡点は存在しない．$\beta_i^{11}\neq\beta_i^{21}$ かつ $a_{i1}+a_{i2}\neq 0$（$i=1,2$）のとき，孤立した内部平衡点は

$$\begin{bmatrix}s_{11}^{1*}\\ s_{12}^{1*}\\ s_{21}^{1*}\\ s_{22}^{1*}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\left\{\hat{a}_1(1-\beta_1^{21})-\hat{a}_2(1-\beta_1^{11})\right\}/(\beta_1^{11}-\beta_1^{21})\\ \left(-\hat{a}_1\beta_1^{21}+\hat{a}_2\beta_1^{11}\right)/(\beta_1^{11}-\beta_1^{21})\\ \left\{\hat{a}_1(1-\beta_2^{21})-\hat{a}_2(1-\beta_2^{11})\right\}/(\beta_2^{11}-\beta_2^{21})\\ \left(-\hat{a}_1\beta_2^{21}+\hat{a}_2\beta_2^{11}\right)/(\beta_2^{11}-\beta_2^{21})\end{bmatrix}$$

となる．ここで $\hat{a}_i=a_{i2}/(a_{i1}+a_{i2})$ である．

内部平衡点の安定性を考える．内部平衡点 s^* においては，全ての i,j,k（$i,j,k=1,2$）に対して，

$$\sum_{l=1}^{n}\alpha_l\beta_i^{lj}(e^k-s_{ij}^*)^T A_i\left(E_l^i s_l^*\right)=0$$
$$\iff e^{kT}A_i\left(\sum_{l=1}^{n}\alpha_l\beta_i^{lj}E_l^i s_l^*\right)=s_{ij}^{*T}A_i\left(\sum_{l=1}^{n}\alpha_l\beta_i^{lj}E_l^i s_l^*\right)$$

表1　2集団チキンゲームにおける各集団の利得

集団1：一般的な主体

	突進	回避
突進	-3	1
回避	-1	0

集団2：名誉を重んじる主体

	突進	回避
突進	-2	2
回避	-1	0

が成り立つことから，

$$\left.\frac{\partial \dot{s}_{ij}^{k}}{\partial s_{uv}^{w}}\right|_{s=s^*} = \left.\frac{\partial}{\partial s_{uv}^{w}} s_{ij}^{k} \sum_{l=1}^{n} \alpha_l \beta_i^{lj} (e^k - s_{ij})^T A_i \left(E_l^i s_l\right)\right|_{s=s^*}$$
$$= \alpha_r \beta_i^{rj} \beta_r^{it} (e^k - s_{ij}^*)^T A_i (e^u - e^n)$$

を得る．これを，2戦略2集団のモデルで考えると，

$$\left.\frac{\partial \dot{s}_{ij}^{1}}{\partial s_{uv}^{1}}\right|_{s=s^*} = \alpha_r \beta_i^{rj} \beta_r^{it} (e^1 - s_{ij}^*)^T A_i (e^1 - e^2)$$
$$= \alpha_r \beta_i^{rj} \beta_r^{it} s_{ij}^{1*} (1 - s_{ij}^{1*})(a_{i1} + a_{i2}) \tag{22}$$

となる．これにより，以下の定理を示すことができる．

［定理5］　対戦相手の誤認を考慮した2戦略2集団のレプリケータダイナミクス（21）の孤立した内部平衡点は，安定とはならない．

［証明］式（22）より，孤立した内部平衡点のヤコビアン J の行列式 $|J|$ を考えると，

$$\begin{aligned}|J| &= \alpha_1^2 \alpha_2^2 (a_{11}+a_{12})^2 (a_{21}+a_{22})^2 \\ &\quad \times s_{11}^{1*}(1-s_{11}^{1*}) s_{12}^{1*}(1-s_{12}^{1*}) s_{21}^{1*}(1-s_{21}^{1*}) s_{22}^{1*}(1-s_{22}^{1*}) \\ &\quad \times \begin{vmatrix} (\beta_1^{11})^2 & \beta_1^{11}\beta_1^{12} & \beta_1^{21}\beta_2^{11} & \beta_1^{21}\beta_2^{12} \\ \beta_1^{12}\beta_1^{11} & (\beta_1^{12})^2 & \beta_1^{22}\beta_2^{11} & \beta_1^{22}\beta_2^{12} \\ \beta_2^{11}\beta_1^{21} & \beta_2^{11}\beta_1^{22} & (\beta_2^{21})^2 & \beta_2^{21}\beta_2^{12} \\ \beta_2^{12}\beta_1^{21} & \beta_2^{12}\beta_1^{22} & \beta_2^{22}\beta_2^{21} & (\beta_2^{22})^2 \end{vmatrix} \\ &= -\alpha_1^2 \alpha_2^2 (a_{11}+a_{12})^2 (a_{21}+a_{22})^2 \\ &\quad \times s_{11}^{1*}(1-s_{11}^{1*}) s_{12}^{1*}(1-s_{12}^{1*}) s_{21}^{1*}(1-s_{21}^{1*}) s_{22}^{1*}(1-s_{22}^{1*}) \\ &\quad \times (\beta_1^{11}-\beta_1^{21})^2 (\beta_2^{11}-\beta_2^{21})^2 \end{aligned}$$

となる．ここで，孤立した内部平衡点が存在するのは $\beta_i^{11} - \beta_i^{21} \neq 0$，$a_{i1} + a_{i2} \neq 0$（$i = 1, 2$）の場合であるから $|J| < 0$ となる．したがってヤコビアン J は奇数個の不安定実固有値を持つから，孤立した内部平衡点は安定とはならない．　□

5. 2集団チキンゲーム

本章ではチキンゲームを考える．チキンゲームは，2人の人物が向かい合わせで車を走らせ，それぞれが「回避」するかそれともそのまま「突進」するか選択するものである．もし一方だけが突進した場合，突進した方はその勇気を賞賛され，回避した方は臆病者だとの評価を受ける．両方とも突進すれば衝突してしまって両方ともに死亡し，両方とも回避すれば双方無事であるが勝敗が決まらない．

集団1を一般的な主体からなる集団とし，集団2を一般よりも名誉を重んじる主体の集団として，利得が表1で表されるような2つの集団を考える．全主体にしめる集団1の主体の割合を $\alpha_1 = 4/5$ とする．ESSやレプリケータダイナミクスが利得の局所シフトに対して不変であるから，表1の利得は利得行列

$$A_1 = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \qquad A_2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

で表すことができる．ただし純粋戦略1は「突進」を表す．

a）認識を考慮しないモデル

$s_1^1 + s_1^2 = 1$，$s_2^1 + s_2^2 = 1$ であることに注意する．この場合，ただ1つのESS $[s_1^1, s_2^1]^T = [1/6, 1]^T$ が存在する．またレプリケータダイナミクスは，

$$\begin{aligned}\dot{s}_1^1 &= s_1^1(1-s_1^1)\left(1 - \tfrac{12}{5}s_1^1 - \tfrac{3}{5}s_2^1\right) \\ \dot{s}_2^1 &= s_2^1(1-s_2^1)\left(2 - \tfrac{12}{5}s_1^1 - \tfrac{3}{5}s_2^1\right)\end{aligned} \tag{23}$$

となる．

b）$\beta_1^{11} = \beta_2^{11} = 1$，$\beta_1^{21} = \beta_2^{21} = 0$ の場合

これは，各集団の主体の認識が正確な場合を表す．このときレプリケータダイナミクスは

$$\begin{aligned}\dot{s}_{11}^1 &= \tfrac{4}{5}s_{11}^1(1-s_{11}^1)(-3s_{11}^1+1) \\ \dot{s}_{12}^1 &= \tfrac{1}{5}s_{12}^1(1-s_{12}^1)(-3s_{21}^1+1) \\ \dot{s}_{21}^1 &= \tfrac{4}{5}s_{21}^1(1-s_{21}^1)(-3s_{12}^1+2) \\ \dot{s}_{22}^1 &= \tfrac{1}{5}s_{22}^1(1-s_{22}^1)(-3s_{22}^1+2)\end{aligned} \tag{24}$$

となる．認識に誤りがないことから，集団 P_1（または P_2）の主体は，同じ集団の主体とゲームを行うときには互いに戦略 s_{11}（s_{22}）を用い、異集団の主体とゲームを行うときには s_{12}（s_{21}）を正確に用いるので，各戦略分布は，これら特定の1つまたは2つの戦略で表されるようなダイナミクスを持つことがわかる．

このモデルでは，認識を考慮しないモデルには存在しなかった内部平衡点が存在する．内部平衡点 $[1/3, 2/3, 1/3, 2/3]^T$ は定理5の証明からもわかるように，サドル型の平衡点となる．レプリケータダイナミクス（24）の状態推移の例を図2（i）に示し,（24）の境界辺上の平衡点の概略を図2（ii）に示す．図2（i）左は，サドル型の内部平衡点に近づく様子を，右は，その平衡点から離れて漸近安定な平衡点の1つである $[1/3, 0, 1, 2/3]^T$ に収束する様子を表す．

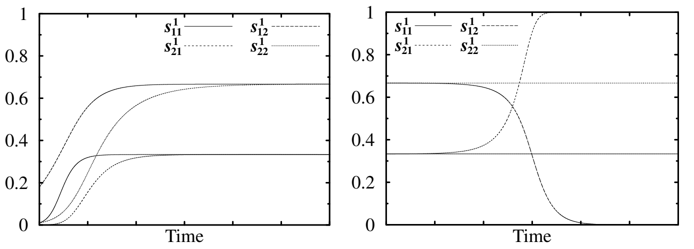
c）$\beta_1^{11} = 0.9$，$\beta_1^{21} = 0.2$，$\beta_2^{11} = 0.8$，$\beta_2^{21} = 0.1$ の場合

これは，各集団の主体の認識に誤りが含まれる場合である．このとき，レプリケータダイナミクスは

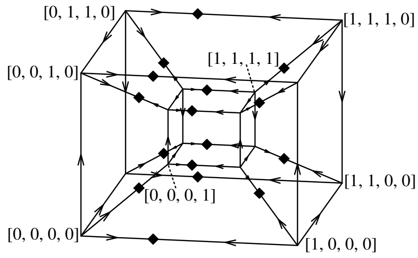
$$\begin{aligned}\dot{s}_{11}^1 &= \tfrac{1}{25}s_{11}^1(1-s_{11}^1)\left\{\tfrac{3}{5}\left(-81s_{11}^1 - 9s_{12}^1 - 4s_{21}^1 - s_{22}^1\right) + 19\right\} \\ \dot{s}_{12}^1 &= \tfrac{3}{25}s_{12}^1(1-s_{12}^1)\left\{\tfrac{1}{5}\left(-9s_{11}^1 - s_{12}^1 - 16s_{21}^1 - 4s_{22}^1\right) + 2\right\} \\ \dot{s}_{21}^1 &= \tfrac{3}{25}s_{21}^1(1-s_{21}^1)\left\{\tfrac{1}{20}\left(-64s_{11}^1 - 256s_{12}^1 - s_{21}^1 - 9s_{22}^1\right) + 11\right\} \\ \dot{s}_{22}^1 &= \tfrac{1}{25}s_{22}^1(1-s_{22}^1)\left\{\tfrac{3}{20}\left(-16s_{11}^1 - 64s_{12}^1 - 9s_{21}^1 - 81s_{22}^1\right) + 17\right\}\end{aligned} \tag{25}$$

となる．

この条件では，b) の場合と同様に内部平衡点が存在する．この内部平衡点は $[2/7, 16/21, 5/21, 5/7]^T$ であり，サドル型の平衡点となる．レプリケータダイナミクス（25）の状態推移の例を図3（i）に示し,（25）の境界辺上の平衡点の概略を図3（ii）に示す．図3（i）左は，サドル型の内部平衡点に近づく様子を，右は，その平衡点から離れて漸近安定な平衡点の1つである $[80/243, 0, 1, 1]^T$ に収束する様子を表す．

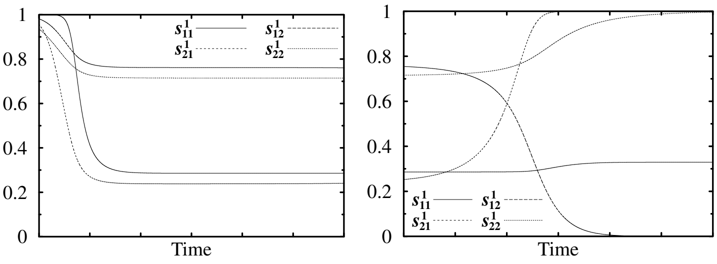


（i）式（24）の状態推移の例

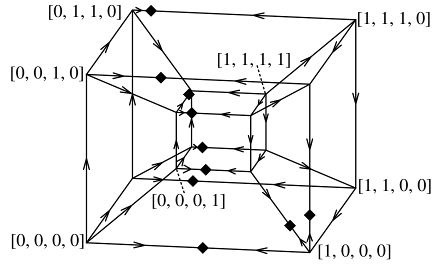


（ii）式（24）の境界辺上の平衡点の概略図

図 2　$\beta_1^{11}=\beta_2^{11}=1$，$\beta_1^{21}=\beta_2^{21}=0$ の場合



（i）式（25）の状態推移の例



（ii）式（25）の境界辺上の平衡点の概略図

図 3　$\beta_1^{11}=0.9$，$\beta_1^{21}=0.2$，$\beta_2^{11}=0.8$，$\beta_2^{21}=0.1$ の場合

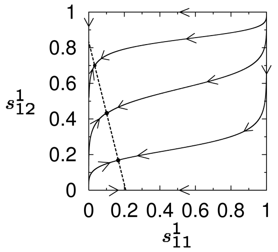


図 4　式（26）の $s_{21}^1=s_{22}^1=1$ での位相図

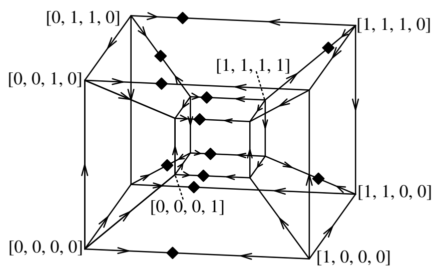


図 5　式（26）の境界辺上の平衡点の概略図

d）$\beta_1^{11}=0.8$，$\beta_1^{21}=0.8$，$\beta_2^{11}=0.6$，$\beta_2^{21}=0.6$ の場合

これは，全ての集団の主体が，全ての集団の主体を区別できない状況を表す．このときレプリケータダイナミクスは

$$\begin{aligned}
\dot{s}_{11}^1&=\tfrac{4}{5}s_{11}^1(1-s_{11}^1)\left\{\tfrac{3}{25}\left(-16s_{11}^1-4s_{12}^1-3s_{21}^1-2s_{22}^1\right)+1\right\}\\
\dot{s}_{12}^1&=\tfrac{1}{5}s_{12}^1(1-s_{12}^1)\left\{\tfrac{3}{25}\left(-16s_{11}^1-4s_{12}^1-3s_{21}^1-2s_{22}^1\right)+1\right\}\\
\dot{s}_{21}^1&=\tfrac{3}{5}s_{21}^1(1-s_{21}^1)\left\{\tfrac{3}{25}\left(-16s_{11}^1-4s_{12}^1-3s_{21}^1-2s_{22}^1\right)+2\right\}\\
\dot{s}_{22}^1&=\tfrac{2}{5}s_{22}^1(1-s_{22}^1)\left\{\tfrac{3}{25}\left(-16s_{11}^1-4s_{12}^1-3s_{21}^1-2s_{22}^1\right)+2\right\}
\end{aligned} \tag{26}$$

となる．このとき，定理 4 により，

$$\frac{4}{5}s_{11}^1+\frac{1}{5}s_{12}^1=\frac{1}{6},\qquad \frac{3}{5}s_{21}^1+\frac{2}{5}s_{22}^1=1$$

を満たす戦略の組がレプリケータダイナミクス (26) の平衡点となる．しかしながら，条件を満たす s_{21}^1，s_{22}^1 は，$s_{21}^1=s_{22}^1=1$ のみであるので，実際には，

$$s_{12}^1=-4s_{11}^1+\frac{5}{6},\quad 0\leqq s_{12}^1\leqq\frac{5}{6},\qquad s_{21}^1=s_{22}^1=1$$

を満たす点が平衡点となる．図 4 に，$s_{21}^1=s_{22}^1=1$ と固定した場合の s_{11}^1，s_{12}^1 の位相図を示す．点線が $s_{12}^1=-4s_{11}^1+5/6$ を示し，線上の点が全て平衡点となっていて，その線上の点に向かって，解が収束している様子がわかる．また図 5 にレプリケータダイナミクス（26）の境界辺上の平衡点の概略を示す．

6. む す び

本報告では，各主体が対戦相手の属する集団によって戦略を変化させると考え，それぞれの主体が他の主体の属する集団を誤って認識することを考慮した，進化ゲームモデルを提案した．ESS とレプリケータダイナミクスを定め，その性質を示した．また，主体の認識が特殊な条件を満たす場合の，レプリケータダイナミクスの平衡点と，認識を考慮しないモデルの ESS の関係を示した．さらに，利得や認識の異なる 2 つの集団の主体がチキンゲームを行う状況に適用し，シミュレーションを行った．

文　　献

[1] J・ホッフバウアー，K・シグムンド，進化ゲームと微分方程式，竹内康博・佐藤一憲・宮崎倫子訳，現代数学社，京都，2001.

[2] P. D. Taylor, “Evolutionarily stable strategies with two types of player,” *Journal of Applied Probability*, Vol. 16, pp. 76–83, 1979.

[3] R. Cressman, J. Garay, and J. Hofbauer, “Evolutionary stability concepts for n-species frequency-dependent interactions,” *Journal of Theoretical Biology*, Vol. 211, No. 1, pp. 1–10, 2001.

[4] M. Wang, K. W. Hipel, and N. M. Fraser, “Solution concepts in hypergames,” *Applied Mathematics and Computation*, Vol. 34, No. 3, pp. 147–171, 1989.

[5] J. Garay and Z. Varga, “Strict ess for n-species systems,” *Biosystems*, Vol. 56, pp. 131–137, 2000.